**Дробный факторный анализ**

Количество опытов в полном факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых линейных коэффициентов. так как на практике большую значимость имеют линейные коэффициенты, а коэффициенты взаимодействий часто не значимы, то получается, что полный факторный эксперимент обладает избыточностью опытов. Поэтому возникает необходимость сократить количество опытов, при этом нужно учесть тот факт, что матрица планирования должна сохранить свои оптимальные свойства (ортогональность, ротатабельность и т.д.).

**Чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Для того чтобы дробная реплика представляла собой ортогональный план, в качестве реплики следует брать ближайший полный факторный эксперимент. При этом число опытов должно быть не менее числа искомых коэффициентов.**

Т.е. для трех факторов вместо уравнения:

можно рассмотреть линейное уравнение:

и определить только 4 коэффициента, таким образом для трех факторов в ПФЭ необходимо 8 опытов, а в дробном благодаря приравниванию коэффициентов взаимодействия к линейным коэффициентам количество опытов для 3 факторов сокращается до 4.

Если в ПФЭ 23 использовать Х1Х2 в качестве плана для Х3, тогда матрица планирования эксперимента принимает следующий вид

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ опыта** | **План** | | | | **Результат** |
| **Х0** | **Х1** | **Х2** | **Х3=Х1Х2** |
| 1 | +1 | -1 | -1 | +1 | Y1 |
| 2 | +1 | +1 | -1 | -1 | Y2 |
| 3 | +1 | -1 | +1 | -1 | Y3 |
| 4 | +1 | +1 | +1 | +1 | Y4 |

Такой сокращенный план носит название дробного факторного эксперимента (ДФЭ).

Формальное приравнивание произведение факторов фактору, не входящему в это произведение, является основополагающей идеей метода ДФЭ. В случае 23 представленный план является половиной ПФЭ, поэтому называется полурепликой от ПФЭ.

В таблице представлены условные обозначения дробных реплик и количество опытов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число факторов** | **Дробная реплика** | **Условное обозначение (2k-P)** | **Число опытов** | |
| **ДФЭ** | **ПФЭ** |
| 3 | ½ реплика от 23 | 23-1 | 4 | 8 |
| 4 | ½ реплика от 24 | 24-1 | 8 | 16 |
| 5 | ¼ реплика от 25 | 25-2 | 8 | 32 |
| 6 | ⅛ реплика от 26 | 26-3 | 8 | 64 |
| 7 | реплика от 27 | 27-3 | 8 | 128 |
| 5 | ½ реплика от 25 | 25-1 | 16 | 32 |
| 6 | ¼ реплика от 26 | 26-2 | 16 | 64 |
| 7 | ⅛ реплика от 27 | 27-3 | 16 | 128 |
| 8 | реплика от 28 | 28-4 | 16 | 256 |
| 9 | реплика от 29 | 29-5 | 16 | 512 |
| 10 | реплика от 210 | 210-6 | 16 | 1024 |
| 11 | реплика от 211 | 211-7 | 16 | 2048 |
| 12 | реплика от 212 | 212-8 | 16 | 4096 |
| 13 | реплика от 213 | 213-9 | 16 | 8192 |
| 14 | реплика 214 | 214-10 | 16 | 16384 |
| 15 | реплика 215 | 215-11 | 16 | 32768 |

Если коэффициенты регрессии при парных произведениях не равны нулю, то найденные коэффициенты bi будут смешанными оценками их теоретических коэффициентов βi. На практике обычно не удается априорно постулировать равенство нулю эффектов взаимодействия, однако часто имеются основания полагать, что некоторые из них малы по сравнению с линейными эффектами. Операцию смешивания оценок принято условно записывать в виде выражений:

где β- математическое ожидание для соответствующего коэффициента.

Эти генерирующие коэффициенты не могут быть раздельно оценены по плану, включающему всего 4 опыта, так как в этом случае неразличимы столбцы для линейных членов и парных произведений. Если в матрице планирования эксперимента в дополнение к столбцам в таблице .. вычислить еще столбцы для произведения Х1Х3, то увидим, что элементы этого столбца в точности равны элементам столбца Х2. Таким образом, сокращение числа опытов приводит к получению смешанных оценок для коэффициентов.

Для того, чтобы определить какие коэффициенты смешаны, удобно пользоваться следующим приемом: подставив Х3 на место Х1Х2, получим соотношение Х3=Х1Х2, называемое генерирующим соотношением.

Генерирующие соотношение – соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект.

Умножив обе части генерирующего соотношения на Х3, получим:

, т.е.

Это произведение носит название определяющего контраста.

Умножив поочередно определяющий контраст на Х1,Х2, Х3 находим

Х1=Х12Х2Х3= Х2Х3, Х2= Х1Х3, Х3= Х1Х2

Полученным соотношениям соответствует система смешанных оценок, т.е β1 смешана с β23, β2 – с β13, а β3 с β12.

Таким образом, при использовании ДФЭ необходимо иметь четкое представление о так называемой разрешающей способности дробных реплик, т.е. заранее определить какие коэффициенты являются несмешанными оценками для соответствующих коэффициентов. Тогда в зависимости от постановки задачи подбирается дробная реплика, с помощью которой можно извлечь максимальную информацию из эксперимента.

Разрешающая способность задается системой смешивания данной реплики. Она будет максимальной если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего порядка.

Однако физический смысл эксперимента не всегда требует нахождения максимальной разрешающей способности.

Допустим необходимо составить ДФЭ для отклика с четырьмя факторами (k=4), в качестве генерирующего соотношения можно взять Х4= Х1Х2Х3 или любой из эффектов двойного взаимодействия, например, Х4= Х1Х2, тогда матрица планирования ДФЭ будет выглядеть следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ опыта** | **План** | | | | **Генерирующие соотношения** | |
| **Х0** | **Х1** | **Х2** | **Х3** | Х4= Х1Х2Х3 | Х4= Х1Х2 |
| 1 | +1 | -1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| 2 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 | -1 |
| 3 | +1 | -1 | +1 | -1 | +1 | -1 |
| 4 | +1 | +1 | +1 | -1 | -1 | +1 |
| 5 | +1 | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 |
| 6 | +1 | +1 | -1 | +1 | -1 | -1 |
| 7 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 | +1 |

В первом случае определяющий контраст Х42= Х1Х2Х3Х4=1, получаем совместные оценки:

Х1=Х12Х2Х3Х4= Х2Х3Х4;

Х2=Х1Х22Х3Х4= Х1Х3Х4;

Х3=Х1Х2Х32Х4= Х1Х2Х4;

Х4=Х1Х2Х3Х42= Х1Х2Х3;

Х1Х2=Х12Х22Х3Х4= Х3Х4;

Х1Х3=Х12Х2Х32Х4= Х2Х4;

Х1Х4=Х12Х2Х3Х42= Х2Х3;

В реальных задачах тройные взаимодействия бывают равными нулю значительно чаще, чем двойные. Значит, если по физическому смыслу задачи нас более всего интересуют оценки для линейных эффектов, следует использовать генерирующее соотношение Х4= Х1Х2Х3

Во втором случае определяющий контраст выражается соотношением Х42= Х1Х2Х4=1

при этом получим следующую систему смешанных оценок

Х1=Х12Х2Х4= Х2Х4;

Х2=Х1Х22Х4= Х1Х4;

Х3=Х1Х2Х3Х4= Х1Х2 Х3Х4;

Х4=Х1Х2Х42= Х1Х2;

Х1Х3=Х12Х2Х3Х4= Х2Х3Х4;

Х2Х3=Х1Х22Х3Х4= Х1Х2Х4;

Х3Х4=Х1Х2Х3Х42= Х1Х2Х3;

Следовательно, дробную реплику с генерирующим соотношением Х4= Х1Х2 имеет смысл использовать, если нас более всего интересует коэффициенты ; ;

Таким образом планы первого порядка, оптимальные двухуровневые планы ПФЭ 2k и ДФЭ 2k-P имеют следующие преимущества:

1.- планы ортогональны, поэтому все вычисления просты;

2. – все коэффициенты определяются независимо один от другого;

3. – каждый коэффициент определяется по результатам всех n опытов;

4. – все коэффициенты регрессии определяются с одинаковой дисперсией. т.е. эти планы обладают и свойством ротатабельности.

***Пример Дробного планирования эксперимента***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№№*** | ***Фактор влияния*** | ***Основной уровень*** | | ***Шаг*** | ***Верхний уровень*** | | ***Нижний уровень*** |
|  | *Концентрация связующего раствора* | *3%* | | *1%* | *4%* | | *2%* |
|  | *Соотношение связующего раствора и смеси* | *1:1* | | *0,5:1* | *1,5:1* | | *0,5:1* |
|  | *Время перемешивания* | *60 минут* | | *20 минут* | *80 минут* | | *40 минут* |
|  | *Скорость измельчителя* | *40 об/мин* | | *10 об/мин* | *50 об/мин* | | *40 об/мин* |
|  | *Скорость потока связующего раствора* | *3500 мл/мин* | | *500 мл/мин* | *4000 мл/мин* | | *3000 мл/мин* |
|  | *Скорость потока воздуха во время сушки* | *1600 м3/час* | | *300 м3/час* | *1900 м3/час* | | *1300 м3/час* |
|  | *Температура воздуха на входе* | *200C* | | *50C* | *250C* | | *150C* |
|  | *Температура воздуха на выходе.* | *150C* | | *50C* | *100C* | | *200C* |
|  | *Температура продукта* | *200C* | | *50C* | *250C* | | *150C* |
|  | *Размеры пор* | *50 мм* | | *15 мм* | *65 мм* | | *35 мм* |
|  | *Толщина перемычек* | *15 мм* | | *5 мм* | *20 мм* | | *10 мм* |
|  | *Скорость калибрующей установки* | *65 р/мин* | | *10 р/мин* | *75 р/мин* | | *55 р/мин* |
| ***Нормализация (кодирование) факторов*** | | | | | | | | | |  |
| ***Хi*** | ***Название фактора*** | | ***Основной уровень (Х0)*** | | ***Натуральное значение верхнего уровня*** | ***Код верхнего уровня*** | | | ***Натуральное значение нижнего уровня*** | ***Код нижнего уровня*** |
| *Х1* | *Концентрация связующего раствора* | | *3%* | | *4%* | ***1*** | | | *2%* | ***-1*** |
| *Х2* | *Соотношение связующего раствора и смеси* | | *1:1* | | *1,5:1* | ***1*** | | | *0,5:1* | ***-1*** |
| *Х3* | *Время перемешивания* | | *60 минут* | | *80 минут* | ***1*** | | | *40 минут* | ***-1*** |
| *Х4* | *Скорость измельчителя* | | *40 об/мин* | | *50 об/мин* | ***1*** | | | *40 об/мин* | ***-1*** |
| *Х5* | *Скорость потока связующего раствора* | | *3500 мл/мин* | | *4000 мл/мин* | ***1*** | | | *3000 мл/мин* | ***-1*** |
| *Х6* | *Скорость потока воздуха во время сушки* | | *1600 м3/час* | | *1900 м3/час* | ***1*** | | | *1300 м3/час* | ***-1*** |
| *Х7* | *Температура воздуха на входе* | | *200C* | | *250C* | ***1*** | | | *150C* | ***-1*** |
| *Х8* | *Температура воздуха на выходе.* | | *150C* | | *100C* | ***1*** | | | *200C* | ***-1*** |
| *Х9* | *Температура продукта* | | *200C* | | *250C* | ***1*** | | | *150C* | ***-1*** |
| *Х10* | *Размеры пор* | | *50 мм* | | *65 мм* | ***1*** | | | *35 мм* | ***-1*** |
| *Х11* | *Толщина перемычек* | | *15 мм* | | *20 мм* | ***1*** | | | *10 мм* | ***-1*** |
| *Х12* | *Скорость калибрующей установки* | | *65 р/мин* | | *75 р/мин* | ***1*** | | | *55 р/мин* | ***-1*** |

*Полное число эффектов взаимодействий равно числу опытов в ПФЭ, таким образом количество опытов в эксперименте с 12 факторами составляет 4096, такое же количество взаимодействий. Используем 1/256 реплику от 212 (212-8), число опытов для дробной реплики составляет 16.*

*Исходя из предположения, что коэффициенты взаимодействия равны нулю, будем осуществлять поиск линейных коэффициентов.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№ опыта*** | ***Х0*** | ***Х1*** | ***Х2*** | ***Х3*** | ***Х4*** | ***Х5*** | ***Х6*** | ***Х7*** | ***Х8*** | ***Х9*** | ***Х10*** | ***Х11*** | ***Х12=***  ***Х1Х2Х5*** |
| ***1*** | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| ***2*** | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ***3*** | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| ***4*** | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| ***5*** | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| ***6*** | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| ***7*** | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| ***8*** | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| ***9*** | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| ***10*** | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| ***11*** | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| ***12*** | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| ***13*** | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| ***14*** | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| ***15*** | 1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| ***16*** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*Генерирующее соотношение:* ***Х12=Х1Х2Х5***

*Определяющий контраст:* ***Х122=Х1Х2Х5Х12***

*Совместные оценки:*

| ***Хi*** | ***Хi\* Х1Х2Х5*** | ***смешанные коэффициенты*** |
| --- | --- | --- |
| ***Х1*** | ***Х2Х5Х12*** |  |
| ***Х2*** | ***Х1Х5Х12*** |  |
| ***Х3*** | ***Х1Х2 Х3 Х5Х12*** |  |
| ***Х4*** | ***Х1Х2 Х4 Х5Х12*** |  |
| ***Х5*** | ***Х1Х2 Х3Х12*** |  |
| ***Х6*** | ***Х1Х2 Х5Х6Х12*** |  |
| ***Х7*** | ***Х1Х2 Х5Х7Х12*** |  |
| ***Х8*** | ***Х1Х2 Х5Х8Х12*** |  |
| ***Х9*** | ***Х1Х2 Х5Х9Х12*** |  |
| ***Х10*** | ***Х1Х2 Х5Х10Х12*** |  |
| ***Х11*** | ***Х1Х2 Х5Х11Х12*** |  |

*Поскольку в эксперименте нас больше всего интересуют линейные коэффициенты регрессии дальнейшая оценка смешанных коэффициентов не имеет смысла.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Х12*** | ***Х1Х2 Х5Х7*** |  |
| ***Х1Х2*** | ***Х5Х12*** |  |
| ***Х1Х3*** | ***Х2Х3Х5Х12*** |  |
| ***Х1Х4*** | ***Х2Х4Х5Х12*** |  |
| ***Х1Х5*** | ***Х2Х12*** |  |
| ***Х1Х6*** | ***Х2Х6Х5Х12*** |  |
| ***Х1Х7*** | ***Х2Х5Х7Х12*** |  |
| ***Х1Х8*** | ***Х2Х5Х8Х12*** |  |
| ***Х1Х9*** | ***Х2Х5Х9Х12*** |  |
| ***Х1Х10*** | ***Х2Х5Х10Х12*** |  |
| ***Х1Х11*** | ***Х2Х5Х11Х12*** |  |
| ***Х1Х12*** | ***Х2Х5*** |  |
| ***Х2Х3*** | ***Х1Х3Х5Х12*** |  |
| ***Х2Х4*** | ***Х1Х4Х5Х12*** |  |
| ***Х2Х5*** | ***Х1Х12*** |  |
| ***Х2Х6*** | ***Х1Х5Х6Х12*** |  |
| ***Х2Х7*** | ***Х1Х2Х5Х12*** |  |
| ***Х2Х8*** | ***Х1Х5Х8Х12*** |  |
| ***Х2Х9*** | ***Х1Х5Х9Х12*** |  |
| ***Х2Х10*** | ***Х1Х5Х10Х12*** |  |
| ***Х2Х11*** | ***Х1Х5Х10Х12*** |  |
| ***Х2Х12*** | ***Х1Х5*** |  |
| ***Х3Х4*** | ***Х1Х2Х3Х4Х5Х12*** |  |
| ***Х3Х5*** | ***Х1Х2Х3Х12*** |  |
| ***Х3Х6*** | ***Х1Х2Х3Х6Х5Х12*** |  |
| ***Х3Х7*** | ***Х1Х2Х3Х5Х7Х12*** |  |
| ***Х3Х8*** | ***Х1Х2Х3Х5Х8Х12*** |  |
| ***Х3Х9*** | ***Х1Х2Х3Х9Х5Х12*** |  |
| ***Х3Х10*** | ***Х1Х2Х3Х5Х10Х12*** |  |
| ***Х3Х11*** | ***Х1Х2Х3Х5Х11Х12*** |  |
| ***Х3Х12*** | ***Х1Х2Х3Х5Х12*** |  |
| ***Х4Х5*** | ***Х1Х2Х4Х12*** |  |
| ***Х4Х6*** | ***Х1Х2Х4Х6Х5Х12*** |  |
| ***Х4Х7*** | ***Х1Х2Х4Х5Х7Х12*** |  |
| ***Х4Х8*** | ***Х1Х2Х4Х5Х8Х12*** |  |
| ***Х4Х9*** | ***Х1Х2Х4Х5Х9Х12*** |  |
| ***Х4Х10*** | ***Х1Х2Х4Х5Х10Х12*** |  |
| ***Х4Х11*** | ***Х1Х2Х4Х5Х11Х12*** |  |
| ***Х4Х12*** | ***Х1Х2Х4Х5*** |  |
| ***Х5Х6*** | ***Х1Х2Х6Х12*** |  |
| ***Х5Х7*** | ***Х1Х2Х7Х12*** |  |
| ***Х5Х8*** | ***Х1Х2Х8Х12*** |  |
| ***Х5Х9*** | ***Х1Х2Х9Х12*** |  |
| ***Х5Х10*** | ***Х1Х2Х10Х12*** |  |
| ***Х5Х11*** | ***Х1Х2Х11Х12*** |  |
| ***Х5Х12*** | ***Х1Х2*** |  |
| *и т.д.*  *Всего:*  *линейных членов функции – 12*  *двукратных взаимодействий – 66*  *трехкратных взаимодействий – 220* | | |

*Далее проводят эксперимент и расчеты аналогично ПФЭ*